AP MII 2017 HT - B1 - Lösungsmuster

B 1.0 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-3|0)$ und $Q(5|0)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + 0{,}5x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $\boxed{y = -0{,}1x - 2}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

B 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c, dass die Parabel p die Gleichung $\boxed{y = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75}$ hat.

Idee:
- Koordinaten beider Punkte in die Gleichung einsetzen
- mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS) die Werte für a und c bestimmen

P(-3|0) in p: (x y)

$$0 = a \cdot (-3)^2 + 0{,}5 \cdot (-3) + c$$
$$0 = 9a - 1{,}5 + c \qquad | -9a + 1{,}5$$
$$-9a + 1{,}5 = c \qquad (1) \quad ✓$$

Q(5|0) in p: (x y)

$$0 = a \cdot 5^2 + 0{,}5 \cdot 5 + c$$
$$0 = 25a + 2{,}5 + c \qquad | -25a - 2{,}5$$
$$-25a - 2{,}5 = c \qquad (2) \quad ✓$$

Gleichsetzungsverfahren (1) = (2):

$$-9a + 1{,}5 = -25a - 2{,}5 \qquad | +25a - 1{,}5$$
$$16a = -4 \qquad | :16$$
$$a = \underline{\underline{-0{,}25}} \quad ✓$$

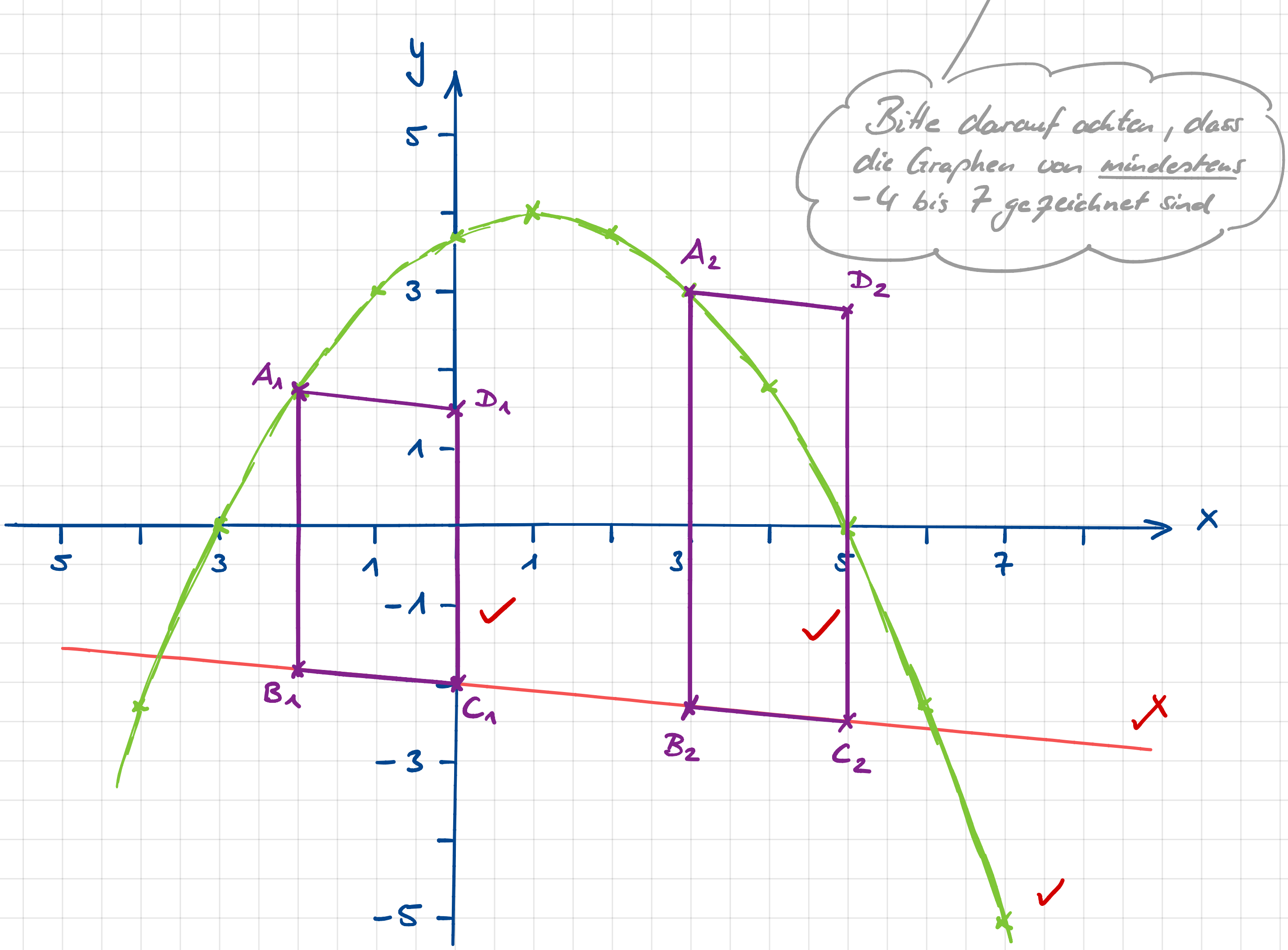
a in (1):

$$c = -9 \cdot (-0{,}25) + 1{,}5$$
$$c = \underline{\underline{3{,}75}} \quad ✓$$

$$\Rightarrow p: \; y = \underline{\underline{-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75}}$$

Zeichnen Sie sodann die Gerade g sowie die Parabel p für $x \in [-4; 7]$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 8; -5 \leqq y \leqq 5$ 4 P



B 1.2 Punkte $A_n(x \mid -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n(x \mid -0{,}1x - 2)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x. *)
Sie sind zusammen mit Punkten C_n und D_n für $x \in]-3{,}74; 6{,}14[$ die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$.
Die Punkte C_n liegen ebenfalls auf der Geraden g. Dabei ist die Abszisse x der Punkte C_n jeweils um 2 größer als die Abszisse x der Punkte B_n. **)
Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -2$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. 2 P

*) die Punkte A_n und B_n haben denselben x-Wert, d.h sie liegen senkrecht übereinander

**) die Punkte C_n haben einen um 2 größeren x-Wert als die Punkte B_n; liegen also um 2 LE weiter rechts

B 1.3 Berechnen Sie die Länge der Strecken $[A_nB_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

$\left[\text{Ergebnis: } \overline{A_nB_n}(x) = (-0{,}25x^2 + 0{,}6x + 5{,}75)\ \text{LE}\right]$ 2 P

$$\boxed{\overline{A_nB_n}(x) = y_{oben} - y_{unten}} = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$= [-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75 - (-0{,}1x - 2)]\ LE \checkmark$$

$$= [-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 3{,}75 + 0{,}1x + 2]\ LE$$

$$= \underline{\underline{[-0{,}25x^2 + 0{,}6x + 5{,}75]\ LE}} \checkmark$$

B 1.4 Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt. 3 P

Idee: ① Aufstellen eines allg. Terms für die Fläche der Parallelogramme

② Zeigen, dass A = 13 FE nicht möglich ist

① $A(x) = g \cdot h = \overline{A_nB_n}(x) \cdot 2\ LE$ ✗

$$= (-0{,}25x^2 + 0{,}6x + 5{,}75) \cdot 2\ FE$$

$$= [-0{,}5x^2 + 1{,}2x + 11{,}5]\ FE \checkmark$$

② $-0{,}5x^2 + 1{,}2x + 11{,}5 = 13 \quad | -13$

$$-0{,}5x^2 + 1{,}2x - 1{,}5 = 0 \quad ✗$$

$a = -0{,}5$ $\qquad D = b^2 - 4ac$

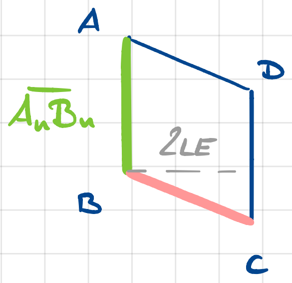
$b = 1{,}2$ $\qquad = 1{,}2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1{,}5)$

$c = -1{,}5$ $\qquad = -1{,}56$ ✗

$D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung ✗

$\Rightarrow$ Es existiert kein Parallelogramm mit A = 13 FE

B 1.5 Unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es die Rauten $A_3B_3C_3D_3$ und $A_4B_4C_4D_4$. Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. [Teilergebnis: $\overline{B_nC_n} = 2{,}01$ LE] 4 P

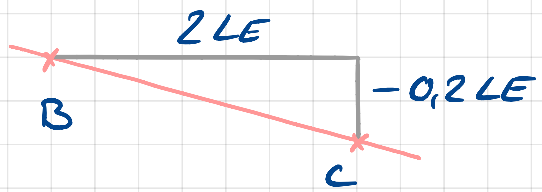


Idee:

Bei einer Raute sind alle Seiten gleich lang

Überlegung mit Steigungsdreieck:

$$m = -0{,}1 = \frac{-0{,}2}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Pythagoras:

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 0{,}2^2}\ LE = 2{,}01\ LE$$

$$\overline{A_nB_n} = \overline{BC}$$

$$-0{,}25x^2 + 0{,}6x + 5{,}75 = 2{,}01 \qquad | -2{,}01$$

$$-0{,}25x^2 + 0{,}6x + 3{,}74 = 0$$

$a = -0{,}25$ $\qquad D = b^2 - 4ac$

$b = 0{,}6$ $\qquad = 0{,}6^2 - 4 \cdot (-0{,}25) \cdot 3{,}74$

$c = 3{,}74$ $\qquad = 4{,}10$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0{,}6 \pm \sqrt{4{,}10}}{2 \cdot (-0{,}25)}$$

$x_1 = \underline{\underline{-2{,}85}}$

$x_2 = \underline{\underline{5{,}25}}$

B 1.6 Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ kein Rechteck gibt. 2 P

- bei einem Rechteck sind alle Innenwinkel 90°
- das ist jedoch nicht möglich, weil die Seiten $[A_nB_n]$ stets senkrecht im KOSY stehen und die Seiten $[B_nC_n] \subset g$ nicht waagerecht verlaufen